

مبرهنة القسمة الثالثة:

ليكن A حيزاً فوق الحلقة R ، I و J مثاليين في A بحيث $I \subseteq J$ عندئذٍ:

$$A/I/J/I \cong A/J$$

البرهان:

نعرّف دالة $f: A/I \rightarrow A/J$ بـ $f(a+I) = a+J$
 $\forall a+I \in A/I$ و $f(a+I) = a+J$

$$\forall a+I, b+I \in \frac{A}{I} \text{ و } a+I = b+I$$

$$(a+I) - (b+I) = I$$

$$= (a-b) + I = I \Rightarrow a-b \in I \subseteq J$$

$$(a-b) + J = J \Rightarrow a+J = b+J$$

$$\Rightarrow f(a+I) = f(b+I)$$

إذاً f تطبيق

f وبتلك صور لن وغاير. مطلوب برهان

حسب مبرهنة القسمة الأولى

$$A/I/\ker f \cong A/J$$

$$\text{وأتى } \ker f = J/I \text{ مطلوب برهان}$$

تحويل آخر:

ليكن A حيزاً فوق الحلقة R ، I و J مثاليين في A

عندئذٍ، A قابل للقسمة على I و J ، عندئذٍ تكون

$$[I, J], \quad I \cap J, \quad I+J$$

مثاليين قابلين للقسمة على A

البرهان:

لدينا A من $A+J$ ، $I \cap J$ ، $[I, J]$ مثاليين في A

لنفرض أن $D^n I = 0$ ، $D^m J = 0$ ، $m, n \in \mathbb{N}$

$$D^n(I \cap J) \subseteq D^n(I) \subseteq I \cap J \subseteq I \quad \text{لينا}$$

$$\Rightarrow D^n(I \cap J) = 0$$

وبالتالي المثال $I \cap J$ قابل للحل

$$[I, J] \subseteq J$$

لدينا أيضاً

$$D^n[I, J] \subseteq D^n J = 0$$

إذا $[I, J]$ قابل للحل

لدينا حسب مبرهنات القائل الثابت

$$\frac{I+J}{I} \cong \frac{J}{I \cap J}$$

بما أن J قابل للحل فإن $\frac{J}{I \cap J}$ قابل للحل

ومما فات $\frac{I+J}{I}$ قابل للحل ومما فات $I+J+I$ قابل للحل

حول لن عددهم القوي

* أهم عناصر في الحلقة (العناصر هبيرة):

- العناصر القابلة للقلب

- العناصر الجاسمة: حيث $a^2 = 0$ a عندها جاسم

- العناصر القاسمة لعناصر جاسمة

* العناصر السبينة في الحلقة:

- عناصر عددهم القوي $a^n = 0$ a عندهم القوي

- العناصر القاسمة للعناصر

$$J(R/J(R)) = 0$$

حلقة هبيرة

$$J(M) = M \cdot J(R)$$

حيث M هو المبررول في المبررول R في المبررول M

نقترح A غير لائق فوق الحلقة R ولندفع

$$CA = A \quad C^2A = [A, CA]$$

$$= [A, A]$$

$$C^3A = [A, C^2A] = [A, [A, A]]$$

$$C^4A = [A, C^3A] = [A, [A, [A, A]]]$$

لنقرن أن لا أحد العدد $n \in \mathbb{N}^*$ حيث $C^n A$ ليس

$$C^{n+1}A = [A, C^n A]$$

$$= [A, [A, [A, \dots, A]]]$$

$n+1$ مرة

لأنه لكل n لنقرن أن $C^n A$ غير لائق

* **تقديرات** لنرى A غير لائق فوق الحلقة R عندئذ:

1- إذا $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $C^n A$ صالح صغير في A

$$A = CA \supseteq C^2A \supseteq C^3A \supseteq \dots$$

متتالية تناقصية من المثاليات الصغيرة في A

البرهان:

1- من أجل $n=1$ فإن $CA=A$ صالح صغير

من أجل $n=2$ فإن $C^2A = [A, CA] = [A, A]$ صالح صغير

لنقرن $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $C^n A$ صالح صغير في A عندئذ

$$C^{n+1}A = [A, C^n A]$$

ولكن من $C^n A$ ، A صالح صغير في A إذا $C^{n+1}A$ صالح صغير في A

2- من أجل $n=1$ فإن $CA=A$

من أجل $n=2$ فإن $C^2A = [A, CA] = [A, A]$

$$= CA$$

$$\begin{aligned}
 c^2 A &= [A, c^2 A] \subseteq [A, cA] = c^2 A \\
 &= [A, c^2 A] = [A, [A, A]] + [A, [A, A]] \\
 &= [A, [A, A]] = [A, cA] = c^2 A
 \end{aligned}$$

لنفرض ان $n \in \mathbb{N}^*$ فان

$$c^n A \subseteq c^{n+1} A$$

$$c^{k+1} A = [A, c^k A] \subseteq [A, c^{k+1} A] \subseteq c^{k+2} A$$

تعريف: ليكن A حيز لي فوق الحقة R ، نقول ان A على القوة n اذا وجد عدد صحيح n بحيث $c^n A = 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$

نقطة:

ليكن A حيز لي فوق الحقة R ، I مثالي في A عندئذ

$$[1] \text{ ايا كان } n \in \mathbb{N}^* \text{ فان } c^n I \subseteq c^n A$$

$$[2] \text{ ايا كان } n \in \mathbb{N}^* \text{ فان } D^n A \subseteq c^{n+1} A$$

$$[3] \text{ ايا كان } n, m \in \mathbb{N}^* \text{ فان } [c^n A, c^m A] \subseteq c^{n+m} A$$

البرهان:

$$[1] \text{ لدينا } cI = I \subseteq A = cA$$

$$c^2 I = [I, cI] \subseteq [A, cA] = c^2 A$$

$$c^k I \subseteq c^k A$$

$$\text{فان } c^{k+1} I = [I, c^k I] \subseteq [A, c^k A] = c^{k+1} A$$

$$[2] \text{ لا بد } D = 0 \text{ لدينا } D^0 A = A = cA$$

$$D^0 A = A = cA$$

$$n=1 \Rightarrow DA = [A, A] = [A, cA] \subseteq c^2 A$$

$$D^2A = [DA, DA] \subseteq [A, C^2A] = C^3A$$

لنفرض ان

$$D^K A \subseteq C^{K+1} A$$

$$D^{K+1} A = [D^K A, D^K A] \subseteq [A, C^{K+1} A] = C^{K+2} A$$

$$[CA, C^m A] = [A, C^m A] = C^{m+1} A \quad \text{لأن } n=1 \quad \text{[3] لا بد}$$

$$n=2; [C^2 A, C^m A] = [[A, CA], C^m A] = [A, A], C^m A$$

$$\subseteq [A, [A, C^m A]] + [C^m A, [A, A]]$$

$$= [A, C^{m+1} A] + [C^m A, C^2 A]$$

$$= C^{m+2} A$$

لنفرض ان K هي قوة

$$[C^K A, C^m A] \subseteq C^{K+m} A$$

فان

$$[C^{K+1} A, C^m A] = [C^m A, [A, C^K A]]$$

$$\subseteq [C^K A, [A, C^m A]] + [A, [C^m A, C^K A]]$$

$$\subseteq [C^K A, C^{m+1} A] + [A, C^{K+m} A]$$

$$= C^{K+m+1} A$$

نتيجة: لكي هيكلية القوى يكون قابلاً للحد

الدرجات:

لنفرض ان A هيكلية القوى عند

يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $C^n A = 0$ فان $D^{n-1} A \subseteq C^n A$ وبالتالي $D^{n-1} A = 0$ وبالتالي فان A قابل للدلالة.

ملاحظة: ليس كل جبر لي قابل للدلالة يكون عديم القوى. وهذا ما تثبته المبرهنات الآتية:

مبرهنات:

ليكن A جبر لي فوق حقل K بعينه 2.

إن A قابل للدلالة ولكن ليس عديم القوى.

البرهان:

وعدنا سابقاً أن A قابل للدلالة.

لنضع $S = \{e_1, e_2\}$ قاعدة للجبر A فوق K .

نميز العناصر:

$$[e_1, e_2] = \lambda e_1 \quad \lambda \in K^* \quad * \text{ الحالة 1}$$

$$CA = A \neq 0$$

$$Z \in C^2 A = [A, C]$$

$$= [A, A]$$

$$Z = [x, y] \quad x, y \in A$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$$

$$Z = [x, y] = \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2, e_1]$$

$$= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) [e_1, e_2] = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \lambda e_1$$

$$\alpha \in K$$

$$= \alpha e_1$$

وهذا يبين أن $C^2 A$ هو فضاء بعينه

$$C^2 A = \{\mu e_1 \mid \mu \in K\} \neq 0$$

أي أن $C^3 A$ فضاء جزئي بعد 1

ليكن $z \in C^3 A = [A, C^2 A]$

نجد أن $z = [x, y]$

$x \in A, y \in C^2 A$

$x = \alpha' e_1 + \beta' e_2, \alpha', \beta' \in K$

$y = \mu' e_1, \mu' \in K$

$$z = [x, y] = \beta' \mu' [e_2, e_1] = -\beta' \mu' [e_1, e_2]$$

$$= -\beta' \mu' e_1$$

$\in K$

$C^3 A = \{ \gamma e_1, \gamma \in K \}$ فضاء جزئي بعد 1

ومن ثم نجد أن $C^3 A = C^3 A \neq 0$

تابع بهذا الشكل نجد أن إذا $k \in \mathbb{N}^*$ فإن

$$C^2 A = C^k A \neq 0 \quad \forall k \geq 2$$

ومن ثم فإن A ليست على القوى

بنفس اللزقات في A إذا $k \in \mathbb{N}$

$$[e_1, e_2] = \theta e_2, \theta \in K$$

فإن حيز A ليس على القوى

إلى اليمين

$$[e_1, e_2] = \sigma e_1 + \varepsilon e_2$$

$$\sigma, \varepsilon \in K, \sigma \neq 0, \varepsilon \neq 0$$

ليكن $z \in C^2 A$ حيث $C^2 A = [A, C A]$

$$z = [x, y], x, y \in A$$

$$x = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2$$

$$y = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$$

$$\sigma_i, \varepsilon_i \in K$$

$$z = [x, y] = \sigma_1 \varepsilon_2 [e_1, e_2] + \sigma_2 \varepsilon_1 [e_2, e_1]$$

$$= (\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1) [e_1, e_2]$$

$$= (\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1) (\sigma_0 e_1 + \varepsilon_0 e_2)$$

$$= \underbrace{(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1) \sigma_0}_{\sigma_0 \in K} e_1 + \underbrace{(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1) \varepsilon_0}_{\varepsilon_0 \in K} e_2$$

$$z = \sigma_0 e_1 + \varepsilon_0 e_2$$

$$C^2 A \subseteq \{0 e_1 + 1 e_1\} = A$$

وبما أن $C^2 A$ فضاء جزئي لـ A

$$C^2 A = A \neq 0$$

أي أن

$$C^3 A = A \neq 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad C^k A = A \neq 0$$

وبالتالي فإن A ليست على القوى.

نصل إلى المبرهن السابق

$$A \supseteq C A \supseteq C^2 A \supseteq \dots$$

لا تنقطع ولكم منها إما A أو $C^2 A$ في

المبرهن المعروف فوق K والذي يعينه 2